重み多項式に関する話題[1]

大浦 学[2](高知大学理学部数理情報科学科)

今日、議論したいのは次の問題です。複素数体 $\mathbf{C}$ 上有限生成な環があって生成元を固定し

$$\mathbf{C}[f_1, f_2, \ldots] = \mathbf{C}[f_1, f_2, \ldots, f_n],$$

任意の f_i を $f_1, \ldots, f_n$ の多項式として表した場合

$$^{\forall} f_i,\ f_i = \sum c_{**\cdots*} f_1^* f_2^* \cdots f_n^*,$$

係数 $c_{**\cdots*}$ としてどのような数が現れるか。$\mathbf{C}$ の元ではあるが、取り扱う環によってはもう少し小さくてもよい場合があるだろう、という訳です。環としてここで取り扱うのは符号理論からくるものです。今述べた問題は生成元の取り方に依存しますが、生成元達の情報がより多く得られるだろうと考えています。今日、お話しする内容は

Y.Choie and M.Oura,

The joint weight enumerators and Siegel modular forms

から取りました。Section 1 で後の議論に必要な符号理論、モジュラ形式について述べた後、Section 2 で種数 1 の場合、Section 3 で種数 2 の場合の上の問題を議論します。

1. 符号理論とジーゲルモジュラ形式. 二元体を $\mathbf{F}_2$ とし、二元体上 n 次元ベクトル空間 $\mathbf{F}_2^n$ には自然な内積 $u \cdot v = \sum u_i v_i$ が入っているものとします。$\mathbf{F}_2^n$ の元 u に対し、0 ではない座標の個数を u の重さと言い、$wt(u)$ で表すことにします。長さ n の線型符号とは $\mathbf{F}_2^n$ の部分空間のことを言います。この講演では単に長さ n の符号と呼ぶことにします。我々が扱う符号はよい性質を持つことが望まれます。その期待に沿う符号として、次に自己双対重偶符号を定義します。符号 $\mathcal{C}$ はその双対符号

$$\mathcal{C}^{\perp} := \{u \in \mathbf{F}_2^n \mid u \cdot v = 0,\ ^{\forall} v \in \mathcal{C}\}$$

と一致する ($\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\perp}$) とき、自己双対であると言われます。重偶符号であるとは、$\mathcal{C}$ の全ての元の重さが 4 の倍数となるときに言います。自己双対かつ重偶符号を自己双対重偶符号と言います。自己双対重偶符号は長さ n が 8 の倍数のときに存在し、またそのときのみ存在することが知られております。次に例を述べます。n を 8 の倍数としたとき、次の $n/2$ 個のベクトルで生成される長さ n の自己双対重偶符号を d_n^+ と書きます:

$$\frac{n}{2}\begin{cases}
(1,1,1,1,0,0,0,0, & \cdots \quad 0,0,0,0),\\
(0,0,1,1,1,1,0,0, & \cdots \quad 0,0,0,0),\\
 & \ddots \\
(0,0,0,0,0,0,0,0, & \cdots \quad 1,1,1,1),\\
(1,0,1,0,1,0,1,0, & \cdots \quad 1,0,1,0).
\end{cases}$$

これを $\frac{n}{2} \times n$ 行列と見立てて、d_n^+ の生成行列と呼ぶことがあります。$n = 8$ の場合のみ、e_8 と書くことにします。e_8 はパラメータ $[8, 4, 4]$ を持つハミング符号と呼ばれています。今日の話しででてくるもう一つの自己双対重偶符号として、パラメータ $[24, 12, 8]$ を持つゴーレイ符号 g_{24} がありますが、具体的な生成元を書くの省略します。

[1]仙台数論及び組合せ論小研究集会 2004 (2005 年 1 月 24 日〜 25 日) における講演記録。

[2]科研費 (No.14740081) より補助を受けています。

次に符号から得られる多項式、重み多項式についてお話しします。長さ n の符号 $\mathcal{C}$ の重み多項式は

$$W_{\mathcal{C}}(x,y) := \sum_{v\in\mathcal{C}} x^{n-wt(v)}y^{wt(v)}$$

で定義されます。これは以下に述べる立場から言いますと、種数 1 の重み多項式ということになります。一般の種数 g に対して、重み多項式を定義します。g 個の $\mathcal{C}$ の元 $v_1,\ v_2,\dots,v_g$ と $a\in\mathbf{F}_2^g$ に対して

$$n_a(v_1,v_2,\dots,v_g) := \sharp\{i|\ a=(v_{1i},v_{2i},\dots,v_{gi})\}$$

とおきます。これは

$$\begin{array}{rl|c|c|c|c|c|l}
v_1 = (& & v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} & &), \\
v_2 = (& & v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} & &), \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\
v_g = (& & v_{g1} & v_{g2} & \cdots & v_{gn} & &)
\end{array}$$

と書いたとき、縦に四角で囲った $\mathbf{F}_2^g$ のベクトル達のなかで a と等しいものが何個現れるかを数えていることになります。さて、長さ n の符号の種数 g の重み多項式は次で定義されます:

$$W_{\mathcal{C}}^{(g)}(x_a : a\in\mathbf{F}_2^g) := \sum_{v_1,v_2,\dots,v_g\in\mathcal{C}}\ \prod_{a\in\mathbf{F}_2^g} x_a^{n_a(v_1,v_2,\dots,v_g)}.$$

この多項式は、次数 n の非負整数係数斉次多項式です。上で種数 1 の重み多項式の定義を書きましたが、$x=x_0,\ y=x_1$ とすると今与えた定義と一致することが確認できます。自己双対重偶符号の種数 g の重み多項式達で生成される $\mathbf{C}$ 上の環を $\mathfrak{W}(g)$ で表すことにします。自己双対重偶符号が存在するための必要十分条件が n が 8 の倍数であることを考えると $\mathfrak{W}(g)=\mathbf{C}\oplus\mathfrak{W}(g)_8\oplus\mathfrak{W}(g)_{16}\oplus\cdots$ という次数付き環であることが分かります。ここで各変数 x_a の次数を 1 と考えて次数をつけていることに注意します。

次にモジュラ形式について復習します。$H_g := \{\tau\in\mathrm{Mat}_{g\times g}(\mathbf{C})|\ {}^t\tau=\tau,\ \dfrac{\tau-\overline{\tau}}{2\sqrt{-1}}>0\}$ を種数 g のジーゲル上半空間、$\Gamma_g := Sp_g(\mathbf{Z})$ を種数 g のモジュラ群とします。H_g 上の正則函数 $\varphi(\tau)$ で

$$\varphi\left((a\tau+b)(c\tau+d)^{-1}\right)=\det(c\tau+d)^k\varphi(\tau),\qquad \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_g$$

を満たすものをモジュラ群 Γ_g に関する重さ k のモジュラ形式というのでした ($g=1$ のときは尖点に関する条件が必要です)。これらにより生成される次数付き環を $A(\Gamma_g)=\mathbf{C}\oplus A(\Gamma_g)_1\oplus A(\Gamma_g)_2\oplus\cdots$ と表すことにします。もう少し条件をきつくしたモジュラ形式を考えてみます。モジュラ形式はフーリエ展開

$$\varphi(\tau)=\sum_s a_f(s)\exp(2\pi\sqrt{-1}\ \mathrm{trace}(s\tau))$$

を持ちます。ここで s は g 次半整数かつ半正定値行列全体をわたります。$A(\Gamma_g)$ の元 f で全ての s に対して $a_f(s)\in\mathbf{Z}$ となるもの全体がなす $\mathbf{Z}$-加群を $A_{\mathbf{Z}}(\Gamma_g)$ と書くことにします。

次に符号理論を利用したモジュラ形式の構成法を述べます。$a,b\in\mathbf{F}_2^g$ に対してテータ定数を

$$\theta_{ab}(\tau) := \sum_{n\in\mathbf{Z}^g}\exp 2\pi\sqrt{-1}\left\{\frac{1}{2}\,{}^t\!\left(n+\frac{a}{2}\right)\tau\left(n+\frac{a}{2}\right)+\left(n+\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{b}{2}\right\}$$

と定義します。写像 $Th:\ x_a \mapsto \theta_{a0}(2\tau)$ は長さ n の自己双対重偶符号 $\mathcal{C}$ を Γ_g に関する重さ $n/2$ のモジュラ形式 $Th(W_{\mathcal{C}}^{(g)})$ へと写し、$\mathbf{C}$ 代数準同型写像 $Th:\ \mathfrak{W}(g) \to A(\Gamma_g)^{(4)}$ を引き起こします。ここで $A(\Gamma_g)^{(4)} = \mathbf{C} \oplus A(\Gamma_g)_4 \oplus A(\Gamma_g)_8 \oplus \cdots$ です。この写像 Th は、$g = 1, 2$ の場合、$\mathfrak{W}^{(g)}$ と $A(\Gamma_g)^{(4)}$ の間の同型写像となることが知られています。次に $Th(W_{\mathcal{C}}^{(g)})$ が格子のテータ函数として捉えられることを説明します。自己双対重偶符号 $\mathcal{C} \subset (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ に対して、自然な射影 $\rho : \mathbf{Z}^n \to (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ の逆像として得られる $\Lambda_{\mathcal{C}} := \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^{-1}(\mathcal{C})$ は even unimodular な格子となります。このとき、$Th(W_{\mathcal{C}}^{(g)})$ は格子のテータ函数 $\vartheta_{\Lambda_{\mathcal{C}}}^{(g)}$ と一致します:

$$Th(W_{\mathcal{C}}) = \vartheta_{\Lambda_{\mathcal{C}}}^{(g)} := \sum_{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_g \in \Lambda_{\mathcal{C}}} \prod_{i,j} \exp \pi\sqrt{-1}(\ell_i \cdot \ell_j)\ \tau_{ij}.$$

格子のフーリエ展開を考えることにより、特に $Th(W_{\mathcal{C}}^{(g)}) \in A_{\mathbf{Z}}(\Gamma_g)^{(4)}$ も理解されると思います。

2. 種数 1 の場合. この Section では種数 1 の場合を取り扱います。重み多項式を $W_{\mathcal{C}}$ と書くことにし、変数は、$x_0,\ x_1$ ではなく、$x,\ y$ を用いることにします。種数 1 の多項式は $\mathbf{C}$ 上代数的独立な二つの元

$$\begin{aligned} W_{e_8} &= x^8 + 14x^4y^4 + y^8, \\ W_{g_{24}} &= x^{24} + 759x^{16}y^8 + 2576x^{12}y^{12} + 759x^8y^{16} + y^{24} \end{aligned}$$

で生成されることが知られています (Gleason, 1970). よって任意の自己双対重偶符号 $\mathcal{C}$ をとってきたとき、その重み多項式 $W_{\mathcal{C}}$ は W_{e_8} と $W_{g_{24}}$ の多項式として**一意的**に表されます。例えば、N.J.A.Sloane のホームページ (http://www.research.att.com/~njas) にある長さ 32 の自己双対重偶符号のリストの 50 番目の符号 $\mathcal{C}_{32,50}$ を考えると

$$W_{\mathcal{C}_{32,50}} = \frac{1}{42}W_{e_8}^4 + \frac{2}{42}W_{e_8}W_{g_{24}}$$

と書けます。ここで係数が $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}]$ の元であることに注目します。逆に**任意に自己双対重偶符号をとってきて二つの生成元 W_{e_8}, $W_{g_{24}}$ の多項式として表した場合、その係数に $\mathrm{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}]$ 以外の元は現れない**ことを示しましょう。$\mathcal{C}$ を任意の自己双対重偶符号とします。$Th(W_{\mathcal{C}})$ は $A_{\mathbf{Z}}(\Gamma_1)$ の元です。$A_{\mathbf{Z}}(\Gamma_1)$ は重さ 4 のアイゼンシュタイン級数 $E_4 = 1 + \cdots$ と重さ 12 の尖点形式 $\Delta = \exp 2\pi\sqrt{-1}\tau + \cdots$ の整数係数の多項式として表されることが知られています。関係式

$$\Delta = \frac{1}{2^5 3 \cdot 7}\left(Th(W_{e_8})^3 - Th(W_{g_{24}})\right)$$

を使いますと、

$$\begin{aligned} Th(W_{\mathcal{C}}) &= \sum c_{ab} E_4^a \Delta^b \qquad (c_{ab} \in \mathbf{Z}) \\ &= \sum c_{ab} Th(W_{e_8})^a \left\{ \frac{1}{2^5 3 \cdot 7}\left(TH(W_{e_8})^3 - Th(W_{g_{24}})\right)^b \right\} \\ &= \sum \widetilde{c_{a'\ b'}} Th(W_{e_8})^{a'} Th(W_{g_{24}})^{b'} \end{aligned}$$

です。よって

$$W_{\mathcal{C}} = \sum \widetilde{c_{a'\ b'}} W_{e_8}^{a'} W_{g_{24}}^{b'}, \quad \widetilde{c_{a'\ b'}} \in \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}]$$

が得られ、上の主張は示されました。

3. 種数 2 の場合. この Section では種数 2 の場合を取り扱います。重み多項式を $W_{\mathcal{C}}$ と簡略化した形で書くことにします。$\mathfrak{W}(2)$ は四つの代数的独立な元 $W_{e_8}, W_{g_{24}}, W_{d_{24}^+}, W_{d_{40}^+}$ と $W_{d_{32}^+}$ で $\mathbf{C}$ 上生成されます (Duke, 1993). 具体的な自己双対重偶符号 d_{48}^+ に対して、その重み多項式は

$$
\begin{aligned}
W_{d_{48}^+} &= 23 \cdot 22229 \cdot 2^{-2}3^{-2}5^{-1}7^{-2}41^{-1}W_{e_8}^6 - 2^5 13 \cdot 23 \cdot 3^{-2}7^{-2}11^{-1}41^{-1}W_{e_8}^3 W_{g_{24}} \\
&+ 2 \cdot 23 \cdot 113 \cdot 3^{-2}7^{-1}11^{-1}41^{-1}W_{e_8}^3 W_{d_{24}^+} - 3^2 5 \cdot 23 \cdot 2^{-2}41^{-1}W_{e_8}^2 W_{d_{32}^+} \\
&+ 2^4 7 \cdot 23 \cdot 3^{-1}5^{-1}41^{-1}W_{e_8} W_{d_{40}^+} - 2^9 19 \cdot 3^{-2}7^{-2}11^{-2}W_{g_{24}}^2 \\
&+ 2^6 23 \cdot 3^{-2}7^{-1}11^{-2}W_{g_{24}} W_{d_{24}^+} + 2 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 3^{-2}11^{-2}W_{d_{24}^+}^2
\end{aligned}
$$

と**一意的**に表されます。逆に、**任意の自己双対重偶符号の種数** 2 **の重み多項式を** $W_{e_8}, W_{g_{24}}, W_{d_{24}^+}, W_{d_{40}^+}, W_{d_{32}^+}$ **達の多項式として表した場合、その係数には** $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{41}]$ **以外の元は現れない**ことを示しましょう。$\mathcal{C}$ を任意の自己双対重偶符号とします。$Th(W_{\mathcal{C}})$ は $A_{\mathbf{Z}}(\Gamma)^{(4)}$ の元です。ここでまず $A_{\mathbf{Z}}(\Gamma_2)$ に関する結果を述べておきます。次の 15 個の $A_{\mathbf{Z}}(\Gamma_2)$ の元

$$X_4, X_6, X_{10}, X_{12}, Y_{12}, X_{16}, X_{18}, X_{24}, X_{28}, X_{30}, X_{35}, X_{36}, X_{40}, X_{42}, X_{48}$$

は $A_{\mathbf{Z}}(\Gamma_2)$ の極小の (すなわち、どの一つも取り除けない) 生成系であることが知られています (井草準一, 1979). ここで生成元 X_k の添字 k はジーゲルモジュラ形式としての重さを表しています。各 X_k の具体的な記述は省略します。この井草の定理より、次の補題が導かれます。

補題 1. $A_{\mathbf{Z}}(\Gamma_2)^{(4)}$ は、$\mathbf{Z}$ 上

$$X_4, X_{12}, Y_{12}, X_{16}, X_{24}, X_{28}, X_{36}, X_{40}, X_{48},$$

かつ

$$
\begin{array}{cccccc}
X_6^2\ , & X_6X_{10}, & X_6X_{18}\ , & X_6X_{30}\ , & X_6X_{42}\ , & X_6X_{35}^2, \\
 & X_{10}^2\ , & X_{10}X_{18}\ , & X_{10}X_{30}\ , & X_{10}X_{42}\ , & X_{10}X_{35}^2, \\
 & & X_{18}^2\ , & X_{18}X_{30}\ , & X_{18}X_{42}\ , & X_{18}X_{35}^2 \\
 & & & X_{30}^2, & X_{30}X_{42}, & X_{30}X_{35}^2, \\
 & & & & X_{42}^2, & X_{42}X_{35}^2, \\
 & & & & & X_{35}^4
\end{array}
$$

で生成される。

これら 30 個の元は $A_{\mathbf{Z}}(\Gamma_2)^{(4)}$ の $\mathbf{Z}$ 上の極小の生成系ではありませんが、我々の議論にはこのままで十分です。この補題により $Th(W_{\mathcal{C}})$ は上記 30 個の元の整数係数多項式として表されます。

補題 2. 補題 1 で与えられた $A_{\mathbf{Z}}(\Gamma_2)^{(4)}$ の生成元はすべて

$$\mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{41}][Th(W_{e_8}), Th(W_{g_{24}}), Th(W_{d_{24}^+}), Th(W_{d_{32}^+}), Th(W_{d_{40}^+})].$$

の元である。

以上により $Th(W_{\mathcal{C}})$ が

$$\mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{41}][Th(W_{e_8}), Th(W_{g_{24}}), Th(W_{d_{24}^+}), Th(W_{d_{32}^+}), Th(W_{d_{40}^+})]$$

の元であること、従って $W_{\mathcal{C}}$ が

$$\mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{41}][W_{e_8}, W_{g_{24}}, W_{d_{24}^+}, W_{d_{32}^+}, W_{d_{40}^+}]$$

の元であることが示され、主張が得られました。