

長さ 24 の自己双対重偶符号の重み多項式について¹

高知大学・理学部 大浦 学 (Manabu Oura)²

Department of Mathematics

Kochi University

今回の内容は

Identities among second order theta constants(仮題)

M. Oura, C. Poor, D. Yuen

から取りました. この原稿を書いている時点では, まだプレプリントとして出回ってはいません. どういう結果を述べるか, を先に言っておきますと,

9 個ある長さが 24 の自己双対重偶符号の種数 g の重み多項式がはじめて線形独立になるのは g が 6 の時である

というものです. この事実と Φ 作用素の理論により $g \geq 6$ なら常に線型独立であることが従います. 問題の由来について少し述べておきます. 同値な符号は同じ重み多項式を持ちますが, たとえ非同値な符号であっても同じ重み多項式を持つ場合があります. しかし一般に知られている重み多項式ではなく, 種数の概念を採り入れた重み多項式を考えると, 十分高い種数になると必ず異なることがわかります. 問題を一般化します.

与えられた符号達の重み多項式が線型独立となるのは種数がいくつのときか.

ここでは符号と重み多項式, というペアでしたが, 格子とテータ級数, というペアも考えられます. この二つのペアは多くの類似点があります. 上で述べた問題の“格子とテータ級数版”に関しては Witt, Kneser, Igusa, Erokhin, Borcherds-Freitag-Weissauer といった人達の結果が知られており, 次にまとめておきます. Even unimodular lattice が存在するための必要十分条件は rank が 8 の倍数のときであり, 分類は 24 のときまで知られています. Lattice の rank が 16, 24 の場合, テータ級数達がはじめて線型独立となるのは種数がそれぞれ 4, 12 のときです. Rank が 8 の場合は even unimodular lattice は E_8 lattice のみですので, 考える必要がありません. Witt の論文に関しては小関先生による解説“Witt の identity を巡って”「仙台数論及び組合せ論小研究集会 2004」

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~taya/sendaiNC/2004/program.html>

を紹介しておきます.

まず, 符号理論について述べます. ここで取り扱われるのは二元体上の線型符号で自己双対かつ重偶なものです. Type II code と呼ぶことにしましょう. Type II code は長さが 8 の倍数のときに存在し, またその時のみ存在することが知られています. 非同値な Type II code の分類は長さ m が 32 の場合まで知られており, その数は

$$1(m=8), 2(m=16), 9(m=24), 85(m=32)$$

です. $m=24$ の場合だけ順番も含めて記号を固定しておきます.

$$d_{12}^2, d_{10}e_7^2, d_8^3, d_6^4, d_{24}, d_4^6, a_1^{24}, d_{16}e_8, e_8^3.$$

¹研究集会「組合せデザインとその周辺における数理的基礎およびそれらの応用」(研究代表者 篠原聡), 平成 17 年 8 月 3 日~8 月 5 日, 京大数理研, における講演記録

²この研究は文部科学省科学研究費補助金(若手研究(B))を受けています.

種数 g の重み多項式は 2^g 変数の多項式環 $\mathbf{C}[F_a : a \in \mathbf{F}_2^g]$ の m 次斉次多項式であり、次で定義されます。

$$W_C^{(g)}(F) = \sum_{x \in \mathbf{C}^g} \prod_i F_{\text{row}_i(x)}.$$

ただし、符号の元は縦ベクトルで書き、 $\text{row}_i(x)$ は x の第 i 番目の横ベクトルを表します。詳しく書くと、 $x_j = {}^t(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) \in \mathbf{C}, 1 \leq j \leq g$, に対して $n \times g$ 行列

$$x = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_g) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1g} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2g} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{ng} \end{pmatrix}$$

ができますので

$$\prod_i F_{\text{row}_i(x)} = F_{x_{11}x_{12}\cdots x_{1g}} F_{x_{21}x_{22}\cdots x_{2g}} \cdots F_{x_{n1}x_{n2}\cdots x_{ng}}$$

と計算します。長さ m の Type II code の種数 g の重み多項式全体で生成される \mathbf{C} 上の有限次元ベクトル空間を P_g^m と書くことにします。関係式 $W_{C_1 \oplus C_2}^{(g)} = W_{C_1}^{(g)} W_{C_2}^{(g)}$ より次数付き環

$$P_g = P_g^0 \oplus P_g^8 \oplus P_g^{16} \oplus P_g^{24} \oplus \cdots, \quad P_g^0 = \mathbf{C},$$

が定義されます。我々が知りたいのは $\dim P_g^{24} = 9$ となる最小の g です。これまでに知られていたのは $\dim P_1^{24} = 2, \dim P_2^{24} = 3, \dim P_3^{24} = 5, \dim P_4^{24} = 7$ です。

次にある特別な有限群の不変式環について議論します。 S が対称な整数係数 $g \times g$ 行列全体を動かすとき、 $D_S = \text{diag}(i^{S[a]})$ と $(T_g)_{ab} = (\frac{1+i}{2})^g (-1)^{a \cdot b}$ で生成される群 H_g とします。これは $2^g \times 2^g$ 行列からなる有限群です。 H_g は自然に $\mathbf{C}[F_a : a \in \mathbf{F}_2^g]$ に作用します。 H_g は 1 の原始 4 乗根を含んでいるので 4 の倍数でない次数の斉次多項式は H_g 不変とはなり得ません。 H_g -不変な m 次斉次多項式達のなす有限次元ベクトル空間を R_g^m とし、次数付き環を

$$R_g = R_g^0 \oplus R_g^4 \oplus R_g^8 \oplus \cdots, \quad R_g^0 = \mathbf{C}$$

と書きます。このとき、各ベクトル空間の次元は次で計算されます。

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\dim R_g^m) t^m = \frac{1}{|H_g|} \sum_{\sigma \in H_g} \frac{1}{\det(1 - t\sigma)}.$$

今回、 $g = 5$ の場合を計算しました。上の等式に従って計算すると H_5 の元すべてに対して行列式を計算していくことになりませんが、 H_5 の位数 ($\doteq 10^{20}$) が大きすぎます。そこで一般種数 g で成り立つ $H_g/N_g \cong Sp(2g, \mathbf{F}_2), \exists N_g \triangleleft H_g$, という同型を利用して計算を行いました。いずれにせよ結果は

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\dim R_5^m) t^m = 1 + t^8 + 2t^{16} + 2t^{20} + 8t^{24} + \cdots$$

となります。これから $\dim R_5^{24} = 8$ がわかります。

さて、本題に入ります。我々は $\dim P_g^{24} = 9$ となる最小の g を知りたいのでした。ところで B. Runge は任意の種数 g に対して $m \equiv 0 \pmod{8}$ ならば $P_g^m = R_g^m$ が成り立つことを示しました。上の計算とあわせて $\dim P_5^{24} = 8$ がわかります。よって $\dim P_g^{24} = 9$ となる最初の g は $g \geq 6$ で

す. 実は $\dim P_6^{24} = 9$ が成り立ちます. この最後の部分について述べましょう. $\dim P_6^{24} = 9$ を示すには 9 個の重み多項式の適当な係数をとってきて, 独立性を示せばよい訳です. 例えば単項式として

$$\begin{aligned}
& (0^{62}, 24, 0), \\
& (0^{32}, 4, 0^{29}, 20, 0), \\
& (2, 0^{29}, 2, 0, 18, 0^{29}, 2, 0), \\
& (1, 0, 1, 0^{25}, 1, 0, 1, 0, 17, 0, 1, 0^{25}, 1, 0, 1, 0), \\
& (0^{28}, 2, 0, 2, 0, 16, 0^{27}, 2, 0, 2, 0), \\
& (0^{24}, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 16, 0^{23}, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), \\
& (2, 0^{29}, 2, 0^3, 2, 0, 2, 0, 2, 0^{23}, 14, 0), \\
& (2, 0^7, 12, 0^{19}, 2, 0^5, 2, 0, 2, 0, 2, 0^{21}, 2, 0^3), \\
& (1, 0, 1, 0^{13}, 1, 0, 1, 0^4, 4, 0^{12}, 2^2, 0^6, 1, 0, 1, 0^5, 1^4, 0^5, 3, 2, 1)
\end{aligned}$$

をとってきてます. この記号の意味は, まず 2^6 個の F_2^6 の元を

$$(0 \cdots 00), (0 \cdots 01), (0 \cdots 10), (0 \cdots 11), \dots, (1 \cdots 11)$$

の順番で固定し, 変数達 F_a もこの順番で固定します. すると例えば, $(0^{32}, 4, 0^{29}, 20, 0)$ は単項式 $F_{(011111)}^4 F_{(111110)}^{20}$ を意味します. 行を 9 個の Type II code, 列を上の単項式に対応させ, 重み多項式の係数を行列の形で表しますと

$$M = \begin{pmatrix}
1 & 30 & 240 & 0 & 720 & 0 & 1440 & 1440 & 16588800 \\
1 & 24 & 144 & 336 & 120 & 0 & 120 & 0 & 27095040 \\
1 & 18 & 72 & 0 & 72 & 0 & 0 & 0 & 23887872 \\
1 & 12 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18164736 \\
1 & 66 & 1320 & 0 & 11880 & 0 & 95040 & 665280 & 0 \\
1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7741440 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 42 & 504 & 1344 & 1848 & 1344 & 6720 & 20160 & 0 \\
1 & 42 & 504 & 4032 & 504 & 4032 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

となります. この行列は行列式が 0 ではないので, 9 個の重み多項式が線型独立であることがわかりました.