

代数的トーラスの有理性問題

山崎愛一

目次

1	用語の説明	2
1.1	有理性 (rationality)	2
1.2	コホモロジー	2
1.3	flabby resolution	3
1.4	代数的トーラス	4
1.5	代数的トーラスの有理性	5
2	$GL(n, \mathbb{Z})$ の有限部分群	5
2.1	$n \leq 6$ のときの $GL(n, \mathbb{Z})$ の有限部分群の表の整備	6
2.2	直既約分解の一意性の成否	8
3	rank 5 以下の代数的トーラスの有理性問題	9
3.1	rank 2, 3 のとき (Voskresenskii, Kunyavskii)	9
3.2	rank 4, 5 のときの計算プログラム	10
3.3	flabby resolution の構成	10
3.4	$[M_G]^{fl}$ の可逆性	11
3.5	$[M_G]^{fl} = 0$ の可能性	11
3.6	$[M_G]^{fl} = 0$ の証明	13
3.7	rank = 4, 5 のときの結果	13
4	必要なソフトのインストール方法	14
4.1	linux への GAP 4.4.12 のインストール	14
4.2	GAP のパッケージのインストール	15
4.3	carat のインストール	15
4.4	より新しい環境への carat のインストール	16
4.5	caratnumber のインストール	17

1 用語の説明

1.1 有理性 (rationality)

k を体, K を k 上有限個の元で生成される体とする.

定義 1. K が k 上 *rational* (k -*rational*) であるとは, K が k 上純超越的なとき, すなわち自然数 n が存在して K が k 上 n 変数有理関数体 $k(x_1, \dots, x_n)$ と同型なときを言う. K が k 上 *stably rational* (*stably k -rational*) であるとは, K 上超越元 y_1, \dots, y_m が存在して $K(y_1, \dots, y_m)$ が k -*rational* であるときを言う. k が無限体のとき, K が *retract k -rational* であるとは, K に含まれる k -*algebra* で

(i) K は R の商体,

(ii) 多項式 $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ および k -*algebra* としての準同型 $\varphi : R \rightarrow k[x_1, \dots, x_n][1/f]$ と $\psi : k[x_1, \dots, x_n][1/f] \rightarrow R$ が存在して $\psi \circ \varphi = 1_R$ を満たす,

ときを言う.

この 3 つの rationality の間には “ k -rational” \Rightarrow “stably k -rational” \Rightarrow “retract k -rational” の関係がある.

1.2 コホモロジー

Galois コホモロジーと Tate コホモロジーを定義する. 詳しくはたとえば [Bro82] 参照.

定義 2. G を群, $\mathbb{Z}[G]$ を G の整数係数群環, M を $\mathbb{Z}[G]$ -加群とする. 負でない整数 n に対して, $C^n(G, M)$ を G^n から M への写像全体のなす加法群とする. $C^n(G, M)$ の要素は n -コチェインと呼ばれる. 境界作用素と呼ばれる準同形 $d^n : C^n(G, M) \rightarrow C^{n+1}(G, M)$ を次のように定義する.

$$(d^n \varphi)(g_1, \dots, g_{n+1}) = g_1 \cdot \varphi(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i \varphi(g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} \varphi(g_1, \dots, g_n).$$

補題 1. $d^{n+1} \circ d^n = 0$ が成り立つ. すなわち $(C(G, M), d)$ はコチェイン複体になる.

定義 3. (群コホモロジー) n -コサイクルを

$$Z^n(G, M) = \text{Ker}(d^n),$$

n -コバウンダリーを

$$\begin{cases} B^0(G, M) = 0 \\ B^n(G, M) = \text{Im} (d^{n-1}) \quad n \geq 1, \end{cases}$$

n 次コホモロジーを

$$H^n(G, M) = Z^n(G, M)/B^n(G, M)$$

で定義する.

定義 4. (*Tate* コホモロジー) G を有限群, M を $\mathbb{Z}[G]$ -加群とする. トレース写像 $T_G : M \rightarrow M$ を

$$T_G(m) = \sum_{g \in G} g \cdot m,$$

n -コサイクルを

$$\begin{cases} \hat{Z}^{-1}(G, M) = \text{Ker} (T_G) \\ \hat{Z}^0(G, M) = M^G = H^0(G, M) \\ \hat{Z}^n(G, M) = Z^n(G, M) \quad n \geq 1, \end{cases}$$

n -コバウンダリーを

$$\begin{cases} \hat{B}^{-1}(G, M) = \sum_{g \in G} \{g \cdot m - m \mid m \in M\} \\ \hat{B}^0(G, M) = \text{Im} (T_G) \\ \hat{B}^n(G, M) = B^n(G, M) \quad n \geq 1, \end{cases}$$

n 次 *Tate* コホモロジーを

$$\hat{H}^n(G, M) = \hat{Z}^n(G, M)/\hat{B}^n(G, M)$$

で定義する.

1.3 flabby resolution

ここでは主に flabby resolution について述べる. 詳しくは [Lo05] 参照.

定義 5. G を有限群とする. $\mathbb{Z}[G]$ -加群 M は, \mathbb{Z} -加群として有限生成自由加群のとき G -格子 (G -lattice) であるという. G -格子 M は, \mathbb{Z} -基底を適当にとれば G の作用が基底の置換を引き起こすようなとき置換格子 (*permutation lattice*) であるという. G -格子 M がある置換格子の直和因子になっているとき, 可逆格子 (*invertible lattice*) であるという. G -格子 M が, G のすべての部分群 H に対して $\hat{H}^{-1}(\mathfrak{H}, M) = 0$ が成り立つとき, *flabby* であるという. ここで \hat{H} は *Tate* コホモロジーを表す. G -格子 M が, G のすべての部分群 H に対して $H^1(\mathfrak{H}, M) = 0$ が成り立つとき, *coflabby* であるという.

定義 6. \mathcal{L}_G を G -格子全体の集合とする. \mathcal{L}_G に同値類を次のように定義する. $M_1, M_2 \in \mathcal{L}_G$ に対して

$$M_1 \sim M_2 \iff \text{置換格子 } Q_1, Q_2 \text{ が存在して } M_1 \oplus Q_1 \simeq M_2 \oplus Q_2.$$

M の属する同値類を $[M]$ と表すことにする.

\mathcal{L}_G の二つの要素を直和するという操作を \mathcal{L}_G 演算とみなすことにより, \mathcal{L}_G の同値類全体の集合 \mathcal{L}_G / \sim に可換モノイドの構造が引き起こされる.

命題 1. 任意の G -格子 M に対して, 次のような完全系列が存在する.

$$0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0$$

ただし P は置換格子, F は *flabby* 格子である. そして, F の同値類 $[F]$ は完全系列の取り方によらずに決まる.

定義 7. 上の命題の完全系列 $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0$ を G -格子 M の *flabby resolution* という. $[F] \in \mathcal{L}_G / \sim$ を M の *flabby class* といい, $[M]^{fl}$ で表す. $[M]^{fl}$ が可逆とは, 可逆格子 E が存在して $[M]^{fl} = [E]$ が成り立つときをいう.

1.4 代数的トーラス

代数的トーラスの定義と基本的性質を述べる. 詳しくは [Vos98] 参照.
 k を体, \bar{k} を k の代数的閉包とする.

定義 8. T を k 上定義された代数群とするとき, T が代数的トーラスであるとは自然数 n が存在して $T \times_k \bar{k} \simeq \bar{k}^{\times n}$ が成り立つときをいう. このとき n を代数的トーラス T の *rank* という.

補題 2. T が k -トーラス ($=k$ 上代数的トーラス) とするとき, k の有限次 Galois 拡大 L が存在して $T \times_k L \simeq L^{\times n}$ が成り立つ. そのような L の中で最小のものが存在する.

定義 9. k -トーラス T に対して, $T \times_k L \simeq L^{\times n}$ が成り立つとき T は L で分裂するという. T が分裂する最小の体を最小分裂体という.

L を k の有限次 Galois 拡大とする. L で分裂する代数的トーラス T に対してその指標群 $X(T) = \text{Hom}(T, L^\times)$ を考える. $T \times_k L \simeq L^{\times n}$ により $T \times_k L$ と $L^{\times n}$ を同一視すると, $\text{Hom}(T \times_k L, L^{\times n})$ は次の $v_i : L^{\times n} \rightarrow L^\times$ で生成される自由 Abel 群である.

$$v_i : L^{\times n} \ni (l_1, \dots, l_n) \mapsto l_i \in L^\times.$$

加法的に書くと $\text{Hom}(T \times_k L, L^{\times n}) = \bigoplus_{1 \leq j \leq n} \mathbb{Z} \cdot u_j$ となる. $G = \text{Gal}(L/k)$ とおくと, $X(T)$ を G -格子と見なすことができる. 逆に G -格子 M が与えら

れたとき, L で分裂する代数的トーラス T で $X(T)$ が G -格子として M と同型になるようなものが存在することが知られている. このようにして, L で分裂する代数的トーラス T と G -格子 M は一対一に対応する.

k の分離閉包を k^{sep} , k の絶対 Galois 群 $Gal(k^{sep}/k)$ を \mathcal{G} とおく. このとき $\text{rank } n$ の k 上の代数的トーラス T は, 連続準同形 $h: \mathcal{G} \rightarrow GL(n, \mathbb{Z})$ の \mathbb{Z} -共役類で決まる. このとき $h(\mathcal{G})$ は $GL(n, \mathbb{Z})$ の有限部分群である.

L で分裂する代数的トーラス T に対して $T \times_k L \simeq L^{\times n}$ により $T \times_k L$ と $L^{\times n}$ を同一視すると, $T \times_k L$ の関数体は次の v_i を超越基底とする有理関数体 $L(v_1, \dots, v_n)$ になることがわかる.

$$v_i: L^{\times n} \ni (l_1, \dots, l_n) \mapsto l_i \in L^{\times}.$$

$\sigma \in G$ の M への作用を $\sigma(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} v_i$, $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ と書くとき, 有理関数体 $L(x_1, \dots, x_n)$ に σ の作用を

$$\sigma(x_j) = \prod_{i=1}^n x_i^{a_{i,j}}, \quad 1 \leq j \leq n$$

で入れたものを $L(M)$ と書くことにする. このとき T の関数体は $L(M)$ の G -不変体 $L(M)^G$ と同一視される.

1.5 代数的トーラスの有理性

定義 10. 代数的トーラス T が k 上 *rational*, *stably rational*, *retract rational* であるとは, 対応する $L(M)$ (1.4 で定義したもの) がそれぞれ *rational*, *stably rational*, *retract rational* であるときをいう.

代数的トーラスの有理性がいつ成り立つかを問題にする. 遠藤-宮田, Voskresenskii, Saltman による次の定理により, 代数的トーラスの有理性は対応する G -格子 M の flabby class $[M]^{fl}$ に帰着される.

定理 1. ([EM73, Vos74, Sal84])

(EM73) $[M]^{fl} = 0 \iff L(M)^G$ は *stably k-rational*.

(Vos74) $[M]^{fl} = [M']^{fl} \iff L(M)^G(x_1, \dots, x_m) \simeq L(M')^G(y_1, \dots, y_n)$.

(Sal84) $[M]^{fl}$ は可逆 $\iff L(M)^G$ は *retract k-rational*.

2 $GL(n, \mathbb{Z})$ の有限部分群

この章からは, 私と星明考さんの共著論文 [HY] の結果と計算機によるその具体的な計算例を主に扱う.

2.1 $n \leq 6$ のときの $GL(n, \mathbb{Z})$ の有限部分群の表の整備

各自然数 n に対して, 共役でない $GL(n, \mathbb{Z})$ の有限部分群は有限個しかない. $n \leq 6$ のとき, 共役でない $GL(n, \mathbb{Q})$ の有限部分群の個数, 共役でない $GL(n, \mathbb{Z})$ の有限部分群の個数は次の表の通りである. ([BBNWZ78, PS00] 参照).

n	1	2	3	4	5	6
$GL(n, \mathbb{Q})$ の有限部分群の個数	2	10	32	227	955	7103
$GL(n, \mathbb{Z})$ の有限部分群の個数	2	13	73	710	6079	85308

$GL(4, \mathbb{Z})$ までの有限部分群の共役類については, [BBNWZ78] に完全な分類表が載っていて, 各共役類に番号付けがされている. また, 数式処理ソフト GAP には, 指定した番号の群を呼び出す組み込み関数が用意されている. `MatGroupZClass(n, i, j, k)` は番号 (i, j, k, l) に対応する群を返す.

しかし $GL(5, \mathbb{Z})$, $GL(6, \mathbb{Z})$ についてはそういうものが見当たらなかった. GAP の `carat` パッケージで一応 $GL(6, \mathbb{Z})$ まで扱えるようにはなっているが, `crystcat` パッケージで $GL(4, \mathbb{Z})$ の有限部分群を番号で指定するようなことは `carat` パッケージではできない. そこで私は $GL(5, \mathbb{Z}), GL(6, \mathbb{Z})$ について `crystcat` パッケージでやっているように分類表を整備し, 計算機上で呼び出せるようにした. 私は, `carat` パッケージ内の `carat-2.1b1/tables/qcatalog.tar.gz` を解凍してできる $GL(1, \mathbb{Q})$ から $GL(6, \mathbb{Q})$ までの有限部分群の表を用いて各群の生成元の一覧表を作った. `qcatalog.tar.gz` 内の `qcatalog/data1` から `qcatalog/data6` までが有限部分群の一覧で, `qcatalog/dim1/` フォルダから `qcatalog/dim6/` フォルダの中に各群の生成元等のデータが入っている. 私は perl でスクリプトを書いてそれらの表を整理した. `cryst1.gap` から `cryst6.gap` という名前のファイルで, それぞれ $GL(1, \mathbb{Q})$ から $GL(6, \mathbb{Q})$ の有限部分群の一覧が GAP で読めるリストの形になっている. このファイルは

<http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~yamasaki/Algorithm/GLnQ.zip> からダウンロードできる. これらのファイルを生成したときの perl スクリプトは <http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~yamasaki/Algorithm/crystlst.pl> からダウンロードできる. 私が最初にこの作業をしたのが 2007 年 11 月ごろで, その当時の `carat` パッケージ (バージョン 2.1) での $GL(6, \mathbb{Q})$ の一覧表で, 同じ群が重複して数えられていたのを見つけた. (現在では修正されている).

次に整数行列からなる有限群 G の $GL(n, \mathbb{Q})$ 共役類から $GL(n, \mathbb{Z})$ 共役類のリストを作る GAP パッケージ `carat` の関数 `ZClassRepsQClass(G)` を用いて, $GL(n, \mathbb{Z})$ の有限部分群の表を作った. `cryst1.txt` から `cryst6.txt` という名前のテキストファイルで,

<http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~yamasaki/Algorithm/crystdat.zip>

からダウンロードできる.

$GL(n, \mathbb{Z})$ の有限部分群が与えられたとき, その群の \mathbb{Q} -共役類および \mathbb{Z} -共役類を $[n, m]$, および $[n, m, l]$ の形で表すことにする. n は行列の次数, m は `qcatalog/datan` および `crystn.gap` の m 番目の \mathbb{Q} -共役類, l は `ZClassRepsQClass(G)` の l 番目の \mathbb{Z} -共役類を表すものとする. G からその群の \mathbb{Q} -共役類および \mathbb{Z} -共役類を求めるプログラムを作った. gap 版は `caratnumber.gap`, magma 版は `caratnumber.magma` で, どちらも

<http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~yamasaki/Algorithm/> からダウンロードできる. GAP 版は ubuntu linux 12.04LTS 上で GAP4.4.12 でプログラムした. (少し修正を加えることで最新の ubuntu linux 16.04LTS 上の GAP4.8 でも動くようである). 生成元の表以外に, 行列の特性多項式の表および $-1, 0, 1$ 次の Tate コホモロジーの表も用いている. そのため, `crystdat.zip` も解凍しておく必要がある.

例えば, G が各行各列に 0 でない成分が一つずつあって ± 1 であるようなもの全体からなる 6 次の群 (位数 $6! \times 2^6$) の例を示す. gap の場合,

```
gap> Read("caratnumber.gap");
gap> CaratQClassNumber(G);
[ 6, 2773 ]
gap> CaratZClassNumber(G);
[ 6, 2773, 1 ]
```

magma の場合,

```
> load "caratnumber.magma";
Loading "caratnumber.magma"
Loading "cryst1.txt"
Loading "cryst2.txt"
Loading "cryst3.txt"
Loading "cryst4.txt"
Loading "cryst5.txt"
Loading "cryst6.txt"
Loading "caratpol.txt"
Loading "H1cryst.txt"
Loading "carat2crystcat.txt"
> CaratQClassNumber(G);
[ 6, 2773 ]
> CaratZClassNumber(G);
[ 6, 2773, 1 ]
```

逆に, 指定された群番号を持つ群を構成するには, `caratnumber.gap` 又は `caratnumber.magma` を読み込んだ状態で, gap ならば

```
gap> G:=CaratMatGroupZClass(6,2773,1);
```

magma ならば

```
> G:=CaratMatGroupZClass(6,2773,1);
```

とすればよい. どちらも実際に入力するのは

```
CaratMatGroupZClass(6,2773,1);
```

の部分だけである.

2.2 直既約分解の一意性の成否

定義 11. G を $GL(n, \mathbb{Z})$ の有限部分群とする. 対応する $\text{rank } n$ の G -格子 M_G を次のように定義する. $\{u_1, \dots, u_n\}$ を \mathbb{Z} -基底とし, $\sigma = [a_{i,j}] \in G$ に対して $\sigma(u_i) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} u_j$ で σ の作用を定める.

定義 12. M を G -格子とする. $M = M_1 \otimes M_2$ の形に二つの G -格子の直和に書けるとき直可約, そうでないとき直既約であるという. M が \mathbb{Z} -加群として $M = M_1 \otimes M_2$ の形に書けて M_1, M_2 のうち少なくとも一方が M の部分 G -格子になっているとき可約, そうでないとき既約であるという.

M が既約ならば直既約であるが, 逆は必ずしも成り立たない.

例 1. $GL(2, \mathbb{Z})$ の位数 2 の二つの部分群 $G_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle, G_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ を考える. それぞれ群番号 (GAP ID) は $(2, 2, 1, 1), (2, 2, 1, 2)$ である. 二つの群は \mathbb{Q} 共役 (すなわち $GL(2, \mathbb{Q})$ の中で共役) だが, \mathbb{Z} 共役でない (すなわち $GL(2, \mathbb{Z})$ の中で共役でない). 対応する G_1 -格子 M_{G_1} については可約かつ直可約である. しかし G_2 -格子 M_{G_2} については, 可約だが直可約ではない.

$n \leq 6$ について, M_G の直既約分解がどうなっているかを計算機を用いて調べた. G を $GL(n, \mathbb{Z})$ の有限部分群, M_G を対応する G -格子とする. $n \leq 4$ のときは M_G は一意的に直既約分解できる. 一方 $n \geq 5$ では M_G が二通りに直既約分解できる場合がある.

例 2. $GL(5, \mathbb{Z})$ の有限部分群 G で M_G が二通りに直既約分解できるものは全部で 11 個ある. いずれも $M_G \simeq M_1 \oplus M_2 \simeq N_1 \oplus N_2$, $\text{rank } M_1 = 4, \text{rank } M_2 = 1, \text{rank } N_1 = 3, \text{rank } N_2 = 2$ の形に二通りに直既約分解できる.

$$X = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad Y = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

とおく. 5 次の単位行列を I と書く. このとき 11 個の群は下表の通りである.

G	CARAT ID	生成元
$S_3 \times C_2 \simeq D_6$	(5, 188, 4)	$\langle X^2, XY, -I \rangle$
$C_2 \times C_6$	(5, 189, 4)	$\langle X, -I \rangle$
D_6	(5, 190, 6)	$\langle -X, Y \rangle$
D_6	(5, 191, 6)	$\langle -X, XY \rangle$
D_6	(5, 192, 6)	$\langle X, Y \rangle$
D_6	(5, 193, 4)	$\langle X, -Y \rangle$
$D_6 \times C_2$	(5, 205, 6)	$\langle X, Y, -I \rangle$
S_3	(5, 218, 8)	$\langle X^2, XY \rangle$
S_3	(5, 219, 8)	$\langle X^2, -XY \rangle$
C_6	(5, 220, 4)	$\langle X \rangle$
C_6	(5, 221, 4)	$\langle -X \rangle$

このとき, X, Y の行列の形から M_G は rank 4 と rank 1 の G -格子の直和に分かれることがわかる. 一方で $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$P^{-1}XP = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad P^{-1}YP = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

となり, M_G は rank 3 と rank 2 の G -格子の直和にも分かれることがわかる.

3 rank 5 以下の代数的トーラスの有理性問題

3.1 rank 2, 3 のとき (Voskresenskii, Kunyavskii)

rank 2 の代数的トーラスは Voskresenskii によってすべて rational であることが示された [Vos67].

rank 3 の代数的トーラスの有理性は Kunyavskii によって解かれた [Kun90]. G が下表の 15 個の群のどれかであれば retract rational でないが, それ以外であれば rational である.

[Kun90] と [HY] では行列の作用を縦に見るか横に見るかが逆になっているため G の転置をとる必要がある.

tG in [Kun90]	GAP ID	G
U_1	(3, 3, 1, 3)	C_2^2
U_2	(3, 3, 3, 3)	C_2^3
U_3	(3, 4, 4, 2)	D_4
U_4	(3, 4, 6, 3)	D_4
U_5	(3, 7, 1, 2)	A_4
U_6	(3, 4, 7, 2)	$D_4 \times C_2$
U_7	(3, 7, 2, 2)	$A_4 \times C_2$
U_8	(3, 7, 3, 3)	S_4
U_9	(3, 7, 3, 2)	S_4
U_{10}	(3, 7, 4, 2)	S_4
U_{11}	(3, 7, 5, 3)	$S_4 \times C_2$
U_{12}	(3, 7, 5, 2)	$S_4 \times C_2$
W_1	(3, 4, 3, 2)	$C_4 \times C_2$
W_2	(3, 3, 3, 4)	C_2^3
W_3	(3, 7, 2, 3)	$A_4 \times C_2$

3.2 rank 4, 5 のときの計算プログラム

そこで rank 4, 5 の代数的トールラスすべてについて stably rational になるか, retract rational になるかを $[M]^{fl}$ を調べることにより決定した. そのための GAP のプログラムは gap 版は FlabbyResolution.gap で,
<http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~yamasaki/Algorithm/> からダウンロードできる.

3.3 flabby resolution の構成

G を $GL(n, \mathbb{Z})$ の有限部分群, $M = M_G$ を対応する G -格子とする. M の flabby resolution $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0$ で rank F がなるべく小さいものを求めたい. $0 \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow M^\circ \rightarrow 0$ を $M^\circ = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ の coflabby resolution とする. すなわち R は置換格子で Q は coflabby とする. この完全系列の双対写像 $0 \rightarrow M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Q, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$ を取ることにより M の flabby resolution を得る.

そこで M° の coflabby resolution を構成することを考える. P° を置換 G -格子, $P^\circ \xrightarrow{f} M^\circ$ を G -準同形とする. G の部分群 H に対し,

$$(P^\circ)^H \xrightarrow{f|_{(P^\circ)^H}} (M^\circ)^H \rightarrow 0 \text{ は完全系列} \quad (1)$$

が成り立つとする. このとき $\hat{H}^0(H, P^\circ) \rightarrow \hat{H}^0(H, M^\circ)$ は全射になる. $Q = \text{Ker } f$ とおくと, $\hat{H}^1(H, Q) = 0$ が成り立つ. M° の coflabby resolution を得るためには置換 G -格子 P° と G 準同形 f で (1) が G のすべての部分群 H に対して成り立つようなものを構成できれば十分である.

$Q = \text{Ker } f$ の rank をなるべく小さくしたいのであるが, そのためにはなるべく小さな rank の置換 G -格子 P° を構成できればよい. いろいろ工夫して P° が小さくなるように GAP 上でプログラムを組んで, flabby resolution が

計算機上で計算できるようにした.

FlabbyResolution(G) は M_G の flabby resolution を返す:

FlabbyResolution(G).actionP は P への G の作用の行列表現を返す;

FlabbyResolution(G).actionF は F への G の作用の行列表現を返す;

FlabbyResolution(G).injection は単射 $\iota: M_G \rightarrow P$ の行列表現を返す;

FlabbyResolution(G).surjection は全射 $\phi: P \rightarrow F$ の行列表現を返す

returns the matrix which corresponds to the surjection $\phi: P \rightarrow F$.

例 3. $G = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rangle \simeq C_3$ のとき, $[M_G]^{fl} = 0$ であることが以下の計算により示される.

```
Read("FlabbyResolution.gap");
```

```
gap> G:=Group([[0,1],[-1,-1]]);
Group([ [ [ 0, 1 ], [ -1, -1 ] ] ])
gap> FlabbyResolution(G);
rec( injection := [ [ 1, 0, -1 ], [ 0, -1, 1 ] ],
      surjection := [ [ 1 ], [ 1 ], [ 1 ] ],
      actionP := Group([ [ [ 0, 0, 1 ], [ 1, 0, 0 ], [ 0, 1, 0 ] ] ]),
      actionF := Group([ [ [ 1 ] ] ]) )
gap> FlabbyResolution(G).actionF; # F is trivial of rank 1
Group([ [ [ 1 ] ] ])
```

3.4 $[M_G]^{fl}$ の可逆性

$[M_G]^{fl}$ が可逆かどうか決定するのは比較的簡単である.

IsInvertibleF(G) は $[M_G]^{fl}$ が可逆かどうかを返す.

$[M_G]^{fl}$ が可逆でなければ, 対応する代数的トーラスは retract rational ではない.

$[M_G]^{fl}$ が可逆ならば, 対応する代数的トーラスは retract rational である. このとき $[M_G]^{fl} = 0$ かどうかによって対応する代数的トーラスが stably rational かどうかが決まる.

3.5 $[M_G]^{fl} = 0$ の可能性

$[M_G]^{fl}$ が可逆とする. 直既約置換 G -格子の各同型類は G の部分群 H の共役類と一対一に次のように対応する. $H \leftrightarrow \mathbb{Z}[G/H]$. H_1, \dots, H_r を G の部分群の共役類を, GAP の関数 ConjugacyClassesSubgroups2(G) が返す順番と同じ順番に並べたものとする. (ConjugacyClassesSubgroups2(G) は GAP のバージョンが同じであれば特定の G に対していつも同じ値を返すが, GAP

のバージョンが異なれば返す値も異なってくる. [HY] では GAP 4.4.12 で計算している.). $[F] = 0$ とする. $x_{r+1} = \pm 1$ に対して, $(\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}[G/H_i]^{\oplus x_i}) \oplus F^{\oplus x_{r+1}} \simeq \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}[G/H_i]^{\oplus y_i}$ が成り立つ. $a_i = x_i - y_i, b_1 = x_{r+1}$ とおくと $b_1 = \pm 1$,

$$\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}[G/H_i]^{\oplus a_i} \simeq F^{\oplus (-b_1)}. \quad (2)$$

が成り立つ.

いくつかの不変量を計算することにより, a_1, \dots, a_r, b_1 の可能性を絞ることができる.

`PossibilityOfStablyPermutationF(G)` returns a basis は a_1, \dots, a_r, b_1 の値の可能性を返す. $\mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_s\}$ が返ってきたとき, a_1, \dots, a_r, b_1 の値は必ず l_1, \dots, l_s の \mathbb{Z} 係数一次結合でなければならない.

例 4. rank 4 の代数的トーラスで G の GAP ID が $(4,31,1,3)$ と $(4,31,1,4)$ の場合を計算する. どちらの場合も G の位数は 20 である.

```
Read("FlabbyResolution.gap");
```

```
gap> G:=MatGroupZClass(4,31,1,3);; # G=F20
gap> Rank(FlabbyResolution(G).actionF.1); # F is of rank 16
16
gap> IsInvertibleF(G);
true
gap> List(ConjugacyClassesSubgroups2(G),x->StructureDescription(Representative(x)));
[ "1", "C2", "C4", "C5", "D10", "C5 : C4" ]
gap> PossibilityOfStablyPermutationF(G); # checking [M]^{fl}: non-zero
[ [ 1, 1, 0, 1, -1, 0, -2 ] ]
```

```
gap> G:=MatGroupZClass(4,31,1,4);; # G=F20
gap> Rank(FlabbyResolution(G).actionF.1); # F is of rank 16
16
gap> IsInvertibleF(G);
true
gap> List(ConjugacyClassesSubgroups2(G),x->StructureDescription(Representative(x)));
[ "1", "C2", "C4", "C5", "D10", "C5 : C4" ]
gap> PossibilityOfStablyPermutationF(G); # checking [M]^{fl}: non-zero
[ [ 1, 1, 0, 1, -1, 0, -2 ] ]
```

$[M_G]^{fl}$ は可逆だが 0 ではない. 従って代数的トーラスは *retract rational* だが *stably reational* ではない. これは rank 3 の *Kunyavskii* の結果には現れなかった現象である.

3.6 $[M_G]^{fl} = 0$ の証明

具体的に (2) の同型写像を構成できれば $[M_G]^{fl} = 0$ の証明ができる. しかし G によっては (2) の両辺の rank がかなり大きくなってしまいうので, 工夫して計算量を減らす必要がある. rank 5 までの代数的トーラスの中で一番大変だったのは G の CARAT ID が (5,946,4) の場合で, (2) の両辺の rank が 88 にもなる.

この場合は GAP での計算だけでは同型写像を構成することはまず不可能で, C 言語による並列計算 (OpenMP) で計算機を何日間も動かした結果やっと同型写像が得られた. [HY] にはこの同型写像を構成するためのデータが具体的に書いてあるので, それを使えば $[M_G]^{fl} = 0$ が成り立つことの検算ができる. ただし, そのときの GAP のバージョンは 4.4.12 でなければならない. (GAP のバージョンが異なれば `ConjugacyClassesSubgroups2(G)` の値が変わり, 構成すべき同型写像の表現行列の具体的な形も変わってしまうからである).

3.7 rank = 4, 5 のときの結果

T を rank 4 または 5 の代数的トーラスとする. 対応する G -格子 M が直可約なとき $M = M_1 \oplus M_2$ と書いたとき, 少なくとも一方は rank が 2 以下である. rank $M_2 = 2$ とすると, $[M]^{fl} = [M_1]^{fl}$ が成り立つ. 従って M が直可約なときはより rank が小さい場合に帰着される. M が直既約の場合が本質的である.

rank 4 の直既約な $GL(4, \mathbb{Z})$ の有限部分群は全部で

定理 2. rank 4 の直既約代数的トーラスについて, $L(M)^G$ が *stably rational* ではないが *retract rational* になるのは次の 7 つの場合だけである.

GAP ID	G	GAP ID	G
(4, 31, 1, 3)	F_{20}	(4, 31, 5, 2)	S_5
(4, 31, 1, 4)	F_{20}	(4, 31, 7, 2)	$C_2 \times S_5$
(4, 31, 2, 2)	$C_2 \times F_{20}$	(4, 33, 2, 1)	$C_3 \times C_8$
(4, 31, 4, 2)	S_5		

また, $L(M)^G$ が *retract rational* でないものは全部で 152 個ある.

定理 3. rank 5 の直既約代数的トーラスについて, $L(M)^G$ が *stably rational* ではないが *retract rational* になるのは存在しない. $L(M)^G$ が *retract rational* でないものは全部で 1141 個ある.

[HY] には $L(M)^G$ が *retract rational* でないときの G の群番号のリストが載っているが, 量が膨大になるのでここでは省略している.

また `FlabbyResolution.gap` にはここでは紹介していない関数がたくさんあり, それらも [HY] では解説している.

4 必要なソフトのインストール方法

4.1 linux への GAP 4.4.12 のインストール

筆者は ubuntu linux 12.04LTS 上で GAP 4.4.12 をインストールした。ほかのバージョンやディストリビューションの linux でも (あるいは Mac OSX でも) 動く可能性があるが、筆者は検証していない。

<http://www.gap-system.org/Releases/4.4.12.html> から必要なファイル gap4r4p12.tar.gz, packages-2012_07_27-09_32.UTC.tar.gz, xtom1r1p4.tar.gz をダウンロードする。たとえば/home/usr/Downloads のフォルダにダウンロードしたとする。

インストールするフォルダ (たとえば/usr/local/) に移動して gap4r4p12.tar.gz を解凍する。

```
tar xvzf /home/usr/Downloads/gap4r4p12.tar.gz
```

gap4r4 のフォルダが作成され、その下にファイルが展開される。インストールしようとしているフォルダに書き込み権限がなくて解凍が行われないときは最初に sudo をつけて

```
sudo tar xvzf /home/usr/Downloads/gap4r4p12.tar.gz
```

と入力すればよい。パスワードを尋ねられるので入力すれば、解凍が行われる。以下でも、書き込み権限関係のエラーでうまくいかないときは同様に最初に sudo をつければよい。

パッケージを入れるフォルダ gap4r4/pkg に移動して

```
cd gap4r4/pkg
```

```
tar xvzf /home/usr/Downloads/packages-2012\_07\_27-09\_32\_UTC.tar.gz
```

を実行する。

GAP のインストールするフォルダに戻って

```
tar xvzf /home/usr/Downloads/xtom1r1p4.tar.gz
```

を実行する。

gap4r4 のフォルダに移動して GAP をコンパイルする。すなわち

```
cd gap4r4
```

```
./configure
```

```
make
```

を実行する。

GAP が正しくコンパイルされたならば

```
bin/gap.sh
```

を実行する。で GAP が立ち上がるはずである。カレントフォルダがどこであって

```
gap
```

と入力するだけで GAP が立ち上がるように設定する。そのためには bin/gap.sh を path の通ったフォルダ (/usr/local/bin など) にコピーすればよい。

```
cp bin/gap.sh /usr/local/bin/gap
```

4.2 GAP のパッケージのインストール

GAP のパッケージによってはさらにインストールをしないと使えないものがある。例えば nq はコンパイルが必要である。カレントフォルダが GAP をインストールしたフォルダにあるとして、nq をコンパイルするには次のようにすればよい。

```
cd /gap4r4/pkg/nq-2.3
./configure
make
```

ほかのパッケージについても、まず該当するパッケージのフォルダに移動してから README ファイルを読んでそこに書いてある通りにインストール作業をすればよい。

4.3 carat のインストール

carat のインストールはほかのパッケージと比べて少し複雑な上に、場合によってはさらに設定を変更する必要があるので解説する。

まず carat のフォルダに移動する。特に設定を変えていなければ GAP をインストールしたフォルダの中の gap4r4/pkg/carat が carat のフォルダになっているはずである。そして carat-2.1b1.tgz を解凍する。

(carat-2.1b1.tgz を解凍したディレクトリ)/carat-2.1b1 を \$(TOPDIR) と表すことにします。

まず \$(TOPDIR) に移動してから Makefile を編集する。

```
cd $(TOPDIR)
gedit Makefile
```

そして、TOPDIR=.. と書いてある行を TOPDIR=\$(TOPDIR) に変更する。ほかにも例えば CFLAGS を変更したければ該当部分を書き換える。そして Makefile を保存してエディタを終了する。

整数行列からなる有限群 G の $GL(n, \mathbb{Q})$ 共役類から $GL(n, \mathbb{Z})$ 共役類のリストを作る GAP パッケージ carat の関数 `ZClassRepsQClass(G)` は, このままでは 1000 個以上の $GL(n, \mathbb{Z})$ 共役類に分かれるときに一部分のリストしか返ってこないことになる. rank が 6 以下のときしか扱わないのであればこれで問題ないが, もし 1000 個以上の $GL(n, \mathbb{Z})$ 共役類に分かれるときも扱いたいのであれば, 1000 をもっと大きな値 (例えば 10000 など) に変更する必要がある.

```
$(TOPDIR)/functions/Graph/lattices.c
$(TOPDIR)/functions/Graph/super-k-groups-fcts.c
$(TOPDIR)/functions/ZZ/ZZ.c
```

の三つのファイルの中から 1000 という数字を検索してもっと大きな数字に変更すればよい.

```
$(TOPDIR) に移動した後で
```

```
make
```

と入力すれば必要なファイルがコンパイルされて carat が使える状態になる.

インストールされている多倍長整数計算ライブラリ `libgmp.so.3` のバージョンが carat で使用しているものと異なると, 誤動作することがある. そのときは次のようにして `libgmp.so.3` を carat で使用しているもので上書きしてしまえばうまく動くようになる. まず carat の実行ファイルがあるフォルダ (例えば `$(TOPDIR)/bin/x86_64-unknown-linux-gnu-gcc` など) に移動する. `ldd` コマンドを使って `Z_equiv` がどの `libgmp.so.3` を参照しているかを調べる.

```
ldd Z_equiv
```

`cp` コマンドを使って `$(TOPDIR)/lib/libgmp.so.3` を, `ldd` コマンドを使って調べた `libgmp.so.3` に上書きする/

```
cp $(TOPDIR)/lib/libgmp3.so.a ldd コマンドを使って調べた libgmp.so.3
```

システムアップデートなどで, 上書きしたはずの `libgmp.so.3` がまた元に戻っていることがあるので, そのたびごとにこの作業を繰り返す必要がある.

4.4 より新しい環境への carat のインストール

4.3 章では ubuntu linux 12.04LTS に GAP 4.4.12 という環境に carat をインストールする方法を解説した.

この章では ubuntu linux 16.04LTS や GAP 4.8 といったより新しい環境に carat をインストールする際の変更点について述べる.

`carat-2.1b1.tgz` を解凍して Makefile を編集し, 必要に応じて


```
$(TOPDIR)/funcitons/Graph/lattices.c
$(TOPDIR)/functions/Graph/super-k-groups-fcts.c
$(TOPDIR)/functions/ZZ/ZZ.c
```

の三つのファイルを書き換えるところまでは 4.3 章と同じ。
その次に

```
$(TOPDIR)/functions/Datei/get_symbol.c
$(TOPDIR)/functions/Datei/read_symbol.c
$(TOPDIR)/functions/Getput/get_bravais.c
$(TOPDIR)/functions/Idem/bravais_catalog.c
$(TOPDIR)/functions/Tools/itoa.c
$(TOPDIR)/include/tools.h
```

の六つのファイルの itoa を itoa10 に置換する。

<http://ftp.gnu.org/gnu/gmp/> から適切なバージョンの tar.bz2 ファイルをダウンロードして $(TOPDIR)/functions$ にコピーする。ubuntu16.04LTS の場合は `sudo apt install libgmp-dev` で `gmp6.1.0` がインストールされるので、`gmp-6.1.0.tar.bz2` をダウンロードして $(TOPDIR)/functions$ にコピーすることになる。次に、 $(TOPDIR)$ の *Makefile* で 4.2.1 をすべて $(GMP_VERSION)$ に置き換える。 `gmp-4.2.1.tar.gz` を解凍している部分は、tar.bz2 ファイルを解凍するように書き換える。そして、`GMP_VERSION = 6.1.0` という行を付け加える。

`make`

でコンパイルする。GAP 4.5 以降の場合は、最後に $(TOPDIR)/bin/x86_64$ -unknown-linux-gnu-gcc を $(TOPDIR)/bin/x86_64$ -unknown-linux-gnu-gcc-default64 に書き換える必要がある。GAP 4.4.12 の場合はこの操作は必要ない。

これで 4.3 章みたいにいちいちシステムファイルの `libgmp.so.3` を置き換える必要がなくなった。

4.5 caratnumber のインストール

<http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~yamasaki/Algorithm/> から `caratnumber.gap` と `crystdat.zip` をダウンロードする。

自分が GAP のプログラムをよく保存するフォルダ (例えば `/home/usr/data/gap/` など) に `caratnumber.gap` をコピーし、`crystdat.zip` を解凍する。

そのフォルダに移動して GAP を起動して、

```
gap> Read("caratnumber.gap");
```

とすれば `caratnumber` が使えるようになる。

参考文献

- [BBNWZ78] H. Brown, R. Bülow, J. Neubüser, H. Wondratschek, H. Zassenhaus. *Crystallographic Groups of Four-Dimensional Space*, John Wiley, New York, 1978.
- [Bro82] K. S. Brown, *Cohomology of Groups*, Grad. Texts in Math., vol. 87, Springer-Verlag, 1972.
- [Carat] J. Opgenorth, W. Plesken, T. Schulz, CARAT, GAP 4 package, version 2.1b1, 2008, available at <http://wwwb.math.rwth-aachen.de/carat/>.
- [EM73] S. Endo, T. Miyata, *Invariants of finite abelian groups*, J. Math. Soc. Japan **25** (1973) 7–26.
- [GAP] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12; 2008. (<http://www.gap-system.org>).
- [HY] A. Hoshi and A. Yamasaki, *Rationality problem for algebraic tori*, to appear in Mem. Amer. Math. Soc., arXiv: 1210.4525.
- [Kun90] B. E. Kunyavskii, *Three-dimensional algebraic tori*, Selecta Math. Soviet. **9** (1990) 1–21.
- [Lo05] M. Lorenz, Multiplicative invariant theory, *Encyclo. Math. Sci. vol. 135*, Springer-Verlag (2005) Berlin.
- [PS00] W. Plesken, T. Schulz, *Counting crystallographic groups in low dimensions*, Exp. Math. **9** (2000) 407–411.
- [Sal84] D. J. Saltman, *Retract rational fields and cyclic Galois extensions*, Israel J. Math. **47** (1984) 165–215.
- [Vos67] V. E. Voskresenskii, *On two-dimensional algebraic tori II*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **31** (1967) 711–716; translation in Math. USSR-Izv. **1** (1967) 691–696.
- [Vos74] V. E. Voskresenskii, *Stable equivalence of algebraic tori*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **38** (1974) 3–10; translation in Math. USSR-Izv. **8** (1974) 1–7.
- [Vos98] V. E. Voskresenskii, *Algebraic groups and their birational invariants*, Translated from the Russian manuscript by Boris Kunyavskii, Translations of Mathematical Monographs, 179. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.